INTEGRALES DE LINEA

INTEGRAL DE LINEA DE CAMPOS ESCALARES

1. Calcule las siguientes integrales de línea

   a) $\int_C f\, ds$ donde C es el arco de parábola $x = y^2 - 4$ desde (-3, -1) hasta (5, 3), y f está dada por $f(x,y) = y + \sqrt{x+4}$.

   b) $\int_C \left(x - y^2 + 4z\right) ds$ donde C es el segmento de recta que une el origen con (1, -2, 2).

---

2. Halle la masa y el centro de masa de un alambre con la forma de la parábola $y = x^2$ desde (0, 0) hasta (2, 4) si su densidad en cada punto es proporcional a su valor de abcisa.

---

3. Para un alambre con la forma $x = 2\,sen\, t\ ;\ y = 2\cos t\ ;\ z = 3t$ con $0 \le t \le 2\pi$ y densidad constante k, encuentre sus momentos de inercia alrededor de los ejes x e y.

INTEGRAL DE LINEA DE CAMPOS VECTORIALES

4. Calcule $\int_C F\, dr$ si $F(x, y) = (y, -x)$ y C es una curva que une los puntos (1, 0) con (0, -1) mediante:
   a) El segmento recto que une dichos puntos.
   b) Las 3/4 partes de la circunferencia unitaria.

---

5. Calcule las siguientes integrales de línea:

   a) $\int_C y\, z\, dy + x\, y\, dz$, siendo C: $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $z = t^2$, $0 \le t \le 1$

   b) $\int_C x^2 y\, dx + 3x\, y^2\, dy$, donde la curva C es una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio a, recorrida dos veces en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

   c) $\int_C F\, dr$ si $F(x,y,z) = (x + 2y + z,\ 2y,\ 3x - z)$ y C está parametrizada por $r(t) = (t+1, 2t+1, t)$ con t desde -1 hasta 2.

d) $\int_C z\,x^3 y^2\, dz$ donde C está dada por $r(t) = \left(2t, t^2, t^2\right),\ -1 \le t \le 0.$

---

6. Determine el trabajo efectuado por el campo de fuerza $F(x,y) = x\,\vec{i} + (y+2)\,\vec{j}$ al mover un objeto a lo largo de la curva $(t - \operatorname{sen} t\,;\, 1 - \cos t)$ con $0 \le t \le 2\pi$.

---

7. Encuentre la circulación de los siguientes campos vectoriales a lo largo del borde de la región limitada por $x = y^2 - 4$ y $x = 5$ en sentido horario:

a) $F = y\vec{i} - x\vec{j}$ b) $F = (2xy+1)\vec{i} + (x^2 + 4y)\vec{j}$

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS INTEGRALES DE LINEA, CAMPO VECTORIAL CONSERVATIVO - FUNCION POTENCIAL

8. Analice si los siguientes campos admiten función potencial; en caso afirmativo, encuéntrela

a) $F(x,y) = \left(x + y^2 ; 2xy\right)$

b) $F(x,y) = (3x^2 - 4y)\,i + (4y^2 - 2x)\,j$

c) $F(x,y,z) = \left(3xy,\ x+2y ; 3yz\right)$

d) $F(x,y,z) = \left\langle 1+z^2\ ;\ 2z\ ;\ 2xz+2y \right\rangle$

e) $F(x,y,z) = \left\langle e^{xz} + xz ; e^{xz} ; y x^2 e^{xz} \right\rangle$

---

9. Muestre que el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (x+1; 2y)$ para mover un objeto desde el punto (1, 0) hasta (2, 2) es el mismo si el trayecto es el que va desde (1, 0) hasta (1, 1) por la circunferencia centrada en el origen y desde ahí hasta (2, 2) en línea recta; o en línea recta directamente desde (1, 0) hasta (2, 2).

---

10. Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos, en caso afirmativo halle una función f, tal que $F = \nabla f$ y utilice esta expresión para evaluar $\int_C F \cdot dr$ a lo largo de la curva C dada:

a) $F(x,y) = \left\langle y, x - y^2 \right\rangle$ para *C* desde *(!, 1)* hasta *(2, 8)* a lo largo de $y = x^3$

b) $\begin{cases} F(x,y,z) = 2x\, y^3 z^4 i \;+\; 3x^2 y^2 z^4 j \;+ 4x^2 y^3 z^3 k \\ x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$

c) $F(x,y,z) = \left(z \; sen\, x\, y,\; x\, y \cos x\, y\,;\; x^2 \cos x\, y \right)$ para *C* desde (-2, 4, 0) hasta (1, 0, 3) en línea recta.

d) $F(x,y,z) = \left(1 + z^2 ,\, 2z\,;\, 2xz + 2y \right)$ para *C* desde (0, 0, 0) hasta (1, 2, 3) a lo largo de segmentos rectilíneos paralelos a los ejes *x, y, z* en ese orden.

---

11. Evalúe la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ para los siguientes campos vectoriales y verifique el resultado mediante la función potencial de ***F*:**

a) $F(x,y,z) = y z^2\, \vec{i} + x z^2\, \vec{j} + 2\, x\, y\, z\, \vec{k}$ siendo *r(t)* la trayectoria que va desde (-1, 2, -2) hacia (1, 5, 2) sobre tres segmentos de recta paralelos al eje *z*, al eje *x*, al eje *y* en ese orden.

b) $F(x,y) = \left\langle x\, y \;;\; \dfrac{x^2}{2} - y \right\rangle$ siendo C los segmentos de recta que van de (0. 0) a (3, 0) y de (3, 0) a (4, 5).

TEOREMA DE GREEN

12. Evalúe la integral de línea mediante dos métodos: de manera directa y utilizando el Teorema de Green.

a) $\int_C 2y\, dx - x\, dy$ donde *C* es la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4$ para $y \ge 0$ recorrida en sentido antihorario.

b) $\int_C \left(x^2 + y^2 , 2x\, y \right) \cdot (dx, dy)$ donde *C* es el triángulo de vértices (-1, -1), (1, -1), (2, 5) recorrido en sentido antihorario.

c) $\int_C x\, sen x\, dx - tg\, y\, dy$ siendo C el triángulo descrito en b) recorrido en sentido horario.

---

14. Compruebe aplicando el Teorema de Green que la integral $\oint_C \left(2 + y^2\right) dx + \left(2\,x\,y - 3\,y\right) dy$ en cualquier curva C plana cerrada es nula.

---

15. Compruebe el Teorema de Green para la función $F(x,y) = \left(x\left(x+y\right),\ x\,y^2\right)$, en el triángulo de vértices (0, 0), (2, 0) y (0, 2).

---

16. Calcular el trabajo que se necesita para llevar un cuerpo desde el punto **(0, -r)** hasta **(0, r)** por la circunferencia de radio ***r***, si en cada punto del plano actúa una fuerza constante de magnitud ***2 r g***, en la dirección negativa del eje *y*. Interpretar físicamente el resultado.

---

17. Verifique el Teorema de Green para $F(x,y) = (x, x\,y^2)$ en la región plana D cuyos puntos cumplen con $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

CALCULO DE AREAS APLICANDO EL T. DE GREEN

1. Utilizando el teorema de Green calcule el área de las regiones:

a) encerrada por $\begin{cases} y^2 = x \\ x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^3 \le y \le 8 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

c) limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Optativos:

INTEGRAL DE LINEA DE CAMPOS ESCALARES

1. Calcule las siguientes integrales de línea

a) $\int_C f\, ds$ donde $f(x,y) = x^2 + y^2$ y C es la semicircunferencia con centro en (1, 0) y radio igual a 3 correspondiente a $x \le 1$.

2.Evaluar la integral de línea $\oint_C F(x,y).dr$ utilizando la función vectorial $F(x,y) = \left(x + y^2, 2x^2 - y\right)$ y la curva cerrada C que es la frontera de la región determinada por las gráficas de $y = x^2$ e $y = 3$. Aplicando el teorema de Green, calcular la integral doble correspondiente y comparar los resultados; deben coincidir.

3. **CALCULO DE AREAS APLICANDO EL T. DE GREEN**

Utilizando el teorema de Green calcule el área de las regiones:

a) limitada por $\begin{cases} x + 1 - y^2 = 0 \\ x - 2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$

3.Calcular el área de las regiones indicadas a continuación mediante la aplicación del Teorema de Green y comprobar el resultado usando la fórmula elemental correspondiente.

a) Círculo $x^2 + y^2 = 9$

b) Trapecio de vértices A (0, 0), B(4, 0), C(0, 3), D(1, 3).